Chapitre 4 : corrigé

Exercice 4.1

Un tenseur des contraintes uniforme dans l'espace (O, x, y, z) mais variant au cours du temps, t > 0. , est donné par : $\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & t \\ 1 & 0 & 2 \\ t & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (MPa) (t en seconde)

Déterminer la densité de force de contact (composante normale et de cisaillement) sur

- **les plans (O, x, y), (O, y, z) et (O, x, z)**
- **le plan passant par O et parallèle au plan définis par les points A(1,0,0), B(0,2,0) et C(0,0,2).**

La densité de force de contact est donnée par $\vec{t} = \sigma\,\vec{n}$. Les composantes normale et tangentielle à la surface sont donc : $t_n = (\sigma\,\vec{n}).\vec{n}$ et $t_t = \sqrt{\vec{t}^2 - t_n^2}$.

Les normales unitaires aux 3 plans de base du repère sont les 3 vecteurs définissant ce repère. On a donc $\vec{t}_{xy} = \sigma\,\vec{e}_z = \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{t}_{yz} = \sigma\,\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$ et $\vec{t}_{xz} = \sigma\,\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ en MPa .

Les composantes normale et tangentielle aux surfaces sont

$$t_{xy,n} = 0,\ t_{xy,t} = \sqrt{t^2+4} \quad \text{en MPa}$$
$$t_{yz,n} = 3,\ t_{yz,t} = \sqrt{t^2+1} \quad \text{en MPa}$$
$$t_{xz,n} = 0,\ t_{xz,t} = \sqrt{5} \quad \text{en MPa}$$

La normale au plan (ABC) se déduit du produit vectoriel qu'il faut normaliser à un :

$$AB = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ AC = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } AB \wedge AC = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{, la normale est donc } n = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } t = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} t+7 \\ 4 \\ 2t+2 \end{pmatrix} \text{ en MPa}$$

soit $t_n = \dfrac{10+2t}{3}$ et $t_t = \dfrac{\sqrt{7}\,|t-1|}{3\sqrt{2}}$ en MPa

Déterminer la force de contact sur le triangle ABC au temps t = 1 s.

La surface du triangle ABC est la moitié de la norme du produit vectoriel soit $S = \frac{1}{2}\sqrt{(16+4+4)} = \sqrt{6}$ en m2 si le repère est en m . Comme au temps t = 1s, la densité de force est uniforme, la force est donnée par :

$$\vec{F} = \vec{t}S = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}.\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ en MN (MPa x m2) soit $F = 4\sqrt{6}.10^6$ N = 9.79 MN (Meganewton)

Déterminer les valeurs propres du tenseur σ au temps t = 1 s.

en t = 1s, $\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (MPa)

Recherche des valeurs propres.

$$\det(\sigma\text{-xI}) = \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 2 \\ 1 & 2 & -x \end{vmatrix} = 0 = (3-x)(x^2-4)-(-\mathrm{x}-2)+(2+\mathrm{x}) = -(\mathrm{x}+2)(\mathrm{x}^2-5x+4) = -(\mathrm{x}+2)(\mathrm{x}-1)(x-4)$$

Les valeurs propres sont 4 MPa, 1 MPa et -2 MPa

Déterminer le repère principal du tenseur des contraintes σ au temps t = 1s.

Recherche des vecteurs propres. Le vecteur propre associé à -2 est défini par

σX = -2X soit $\begin{array}{l} 3\mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{z}=-2x \\ x+2z=-2y \\ x+2y=-2z \end{array}$ Les 3 équations sont nécessairement liées.

Dans notre cas, les équations 2 et 3 sont identiques. Il reste donc : $\begin{array}{l} 5\mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{z}=0 \\ x+2y+2z=0 \end{array}$.

Soit x = 0 et y = - z. Le vecteur propre est donc $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Le vecteur propre associé à 1 est défini par σX = X soit $\begin{array}{l} 3\mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{z}=x \\ x+2z=y \\ x+2y=z \end{array}$

Les 3 équations sont à nouveau liées. Dans notre cas, la somme de 2 et 3 donne l'équation 1. Il reste donc :

$\begin{array}{l} 2\mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{z}=0 \\ x-y+2z=0 \end{array}$ soit x = x, y = -x et z = -x. Le vecteur propre est donc $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Le 3ème vecteur propre est le produit vectoriel des 2 premiers soit $\frac{-1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et il est associé à la valeur propre 4.

Exercice 4.10

1. Appliquons l'équation de la statique au liquide de densité ρ_l:

$\mathrm{div}\sigma + \rho_l g = 0$ avec $\sigma = -p\mathrm{Id}$ (Id = tenseur identité) et $g = -g e_z$

Cela entraine alors les 3 relations suivantes:

$-\mathbf{gradp} + \rho_l \mathbf{g} = \mathbf{0}$ soit $-\dfrac{\partial p}{\partial x} = -\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0$ donc p=p(z) et $-\dfrac{\partial p}{\partial z}$ $-\rho_l g = 0$

ce qui donne $p(z)=-\rho_l gz + \mathrm{cste} = p_a - \rho_l gz$ puisque $p(0)=p_a$

2. Soit une fonction scalaire f et un tenseur tels que $\sigma = fI_d$

Le théorème de la divergence qui s'écrit: $\int_\Omega \mathrm{div}(\sigma)\, dV = \int_{\partial\Omega} \sigma n dS$ devient:

$\mathrm{div}(\sigma) = \mathrm{div}(f\mathrm{Id}) = \mathrm{grad} f$ qui donne $\int_\Omega \mathrm{div}(\sigma)\, dV = \int_\Omega \mathrm{grad} f\, dV = \int_{\partial\Omega} f n dS$

appelé le théorème du gradient: $\int_\Omega \mathrm{grad}(f)\, dV = \int_{\partial\Omega} f\, n dS$

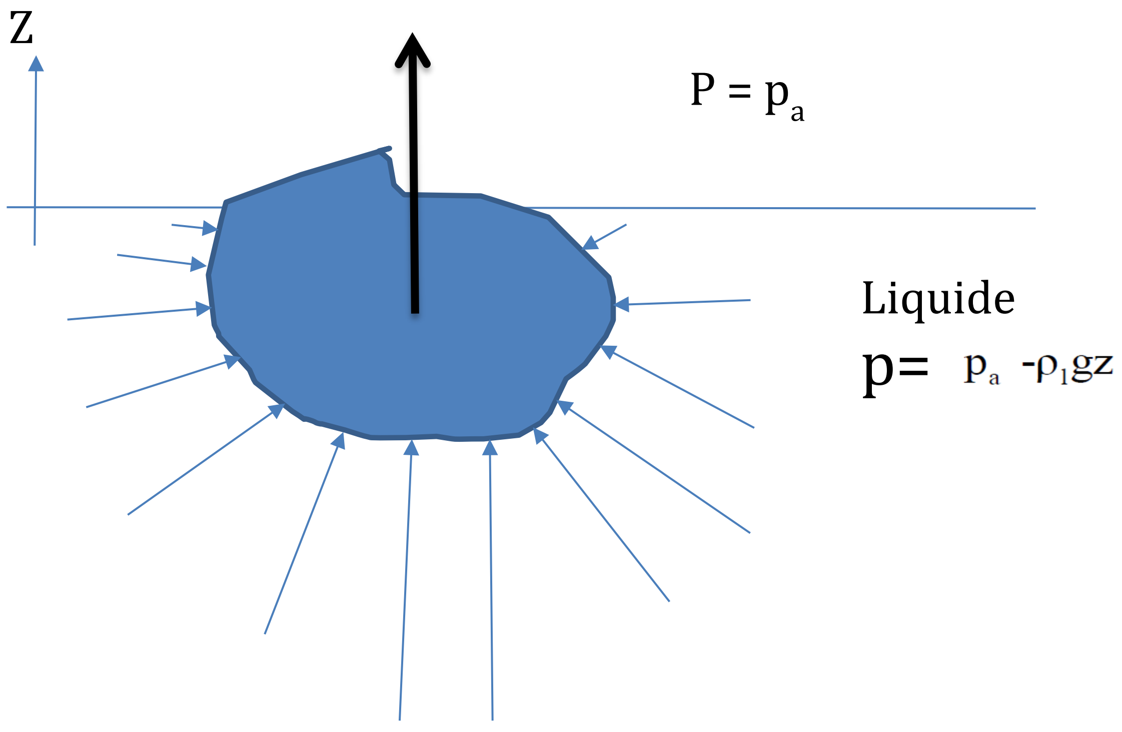
3. L'action du liquide sur la partie immergée d'un solide flottant dans l'eau vaut:

$$\int_{\partial\Omega i} \sigma \mathbf{n} dS = \int_{\partial\Omega i} -p\mathbf{n} dS = -\int_{\partial\Omega i} p\mathbf{n} dS = -\int_{\Omega i} \mathbf{gradp} dV = \int_{\Omega i} \rho_l g \mathbf{e}_z dV = \rho_l g \Omega_i \mathbf{e}_z = \text{poussée d'Archimède}$$

avec $\partial\Omega i$=surface de la partie immergée et Ωi=volume immergé.

Ce qui traduit bien le principe d'Archimède qui devient ainsi un théorème …

Théorème d'Archimède



Exercice 4.11 : volume émergé d'un iceberg

Le but de cet exercice est de calculer le volume émergé d'un iceberg flottant sur la mer. Le tenseur des contraintes dans le fluide supposé au repos est isostatique: ses trois composantes diagonales sont non nulles et égales à –p. La pression atmosphérique (z = 0) est notée p_a. Dans l'exercice précédent, il est établi que les forces de contact sur l'iceberg s'écrivent : $\int_{\partial\Omega} \sigma \mathbf{n} dS = \rho_l g \Omega_i \mathbf{e}_3$ où Ω_i correspond au volume immergé de l'iceberg.

En appliquant l'équilibre mécanique à l'iceberg qui flotte sur l'eau, calculer alors le rapport Ω_e / Ω avec $\Omega = \Omega_i + \Omega_e$ en fonction des masses volumiques du liquide et de la glace notée ρ_g constituant l'iceberg. Ω_e correspond au volume émergé de l'iceberg.

A l'équilibre, le poids de l'iceberg et la poussée d'Archimède se compensent, i.e.

$-\rho_g g\Omega + \rho_l g\Omega_i = 0$ avec Ω avec $\Omega = \Omega_i + \Omega_e$

soit $\Omega(\rho_l - \rho_g) = \rho_l \Omega_e$ et donc $\Omega_e / \Omega = (\rho_l - \rho_g) / \rho_l = (1000 - 900)/1000 = 0.1$

Seul 10% du volume d'un iceberg émerge. Le reste est sous l'eau d'où le danger.